ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ QUỲNH NHƯ

ĐIỀU KIỆN CẦN CỰC TRỊ CỦA BÀI TOÁN BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời nói đầu

Điều kiện cần cực trị cho bài toán tối ưu được Fermat phát biểu cách đây hơn 300 năm. Lí thuyết điều kiện cần cực trị trong không gian hữu hạn chiều cho bài toán có hạn chế được phát triển qua nhiều thời kì bởi các nhà toán học Lagrange, Euler, Kuhn, Tucker,...

Năm 1696, Johann I. Bernoulli đã phát biểu *bài toán đường đoản thời* (brachistochrone): Cho trước hai điểm A và B trên một mặt phẳng thẳng đứng. Hãy xác định đường AMB để dưới tác động của lực trọng trường một vật thể M chuyển động trên đó từ A đến B trong thời gian ngắn nhất.

Vấn đề này bắt nguồn từ thực nghiệm của G. Galilei: Nếu cho hai viên bi giống nhau lăn trên dây cung và trên cung tròn thì viên bi lăn trên cung tròn có thể đến điểm cuối nhanh hơn (mặc dù đường đi dài hơn, nhưng tốc độ lớn hơn).

Giả sử $y(x)$ là hàm mô tả đường cong chuyển động của viên bi trên hệ trục tọa độ (x, y) với $y(x_0) = 0, y(x) \leq 0$ khi $x \geq x_0$. Điểm A có tọa độ là $A(x_0, 0)$ và điểm B có tọa độ là $B(x_1, y_1)$ cho trước.

Giả thiết lực ma sát là không đáng kể, theo định luật rơi Galilei, ta có vận tốc của viên bi là $\sqrt{-2gy(x)}$, trong đó $g \approx 9,8m/s^2$ là gia tốc rơi tự do. Quãng đường đi được sau thời gian dt là $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$. Vì $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$ nên $\sqrt{-2gy(x)} = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}{dt}$ hay $dt = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{-2gy(x)}}dx$.

Thời gian đi từ $A(x_0, 0)$ đến $B(x_1, y_1)$ sẽ là: $T = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{-2gy(x)}}dx$.

Bài toán trở thành: Trong số tất cả các quỹ đạo (đường cong) $y(x)$ nối hai điểm $A(x_0, 0)$ đến $B(x_1, y_1)$ cho trước, hãy tìm đường cong làm cực tiểu phiếm hàm $\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{-2gy(x)}}dx.$

Đây là bài toán cực trị có ràng buộc:

$$T = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{-2gy(x)}}dx \to \inf \tag{1}$$

$$y(x_0) = 0, y(x_1) = y_1. \tag{2}$$

Bài toán (1)–(2) là *bài toán tối ưu trong không gian vô hạn chiều* (không gian tất cả các đường cong trơn nối hai điểm cho trước). Sau Bernoulli, bài toán này được tổng quát thành *bài toán biến phân*:

$$\mathfrak{J}(x(.)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to \inf$$

$$(x(t_0), x(t_1)) \in \Gamma,$$

trong đó $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ cho trước, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, L$ là hàm liên tục trên miền nào đó của $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Mục đích của luận văn là trình bày các khái niệm nghiệm yếu và nghiệm mạnh địa phương và toàn cục của bài toán biến phân, các điều kiện cực trị cấp một và cấp hai của bài toán biến phân.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Tạ Duy Phượng đã tận tình hướng dẫn và giúp đỡ em trong suốt quá tình học tập và nghiên cứu. Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các Giáo sư, Phó giáo sư, Tiến sĩ, quý thầy cô giáo giảng dạy tại Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên và tại Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, đã mang đến cho em nhiều kiến thức bổ ích trong nghiên cứu khoa học. Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình và các bạn đồng môn đã luôn giúp đỡ và động viên tôi trong thời gian học tập và trong quá trình hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 05 năm 2017.

Tác giả

Hoàng Thị Quỳnh Như

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1 Không gian tuyến tính định chuẩn

1.1.1 Khái niệm về không gian tuyến tính

Định nghĩa 1.1.1 Tập $X \neq \varnothing$ gồm các đối tượng nào đó được gọi là một không gian tuyến tính trên trường số thực $\mathbb{R}$, nếu trên đó:

(I) Có qui tắc cho ứng với hai phần tử $x,\ y$ bất kỳ thuộc X một phần tử z cũng thuộc X được gọi là "tổng" của x và y, ký hiệu $z = x + y$;

(II) Có qui tắc cho ứng với một phần tử $\alpha \in \mathbb{R}$ và một phần tử $x \in X$ một phần tử p cũng thuộc X gọi là tích giữa α với x, ký hiệu là $p = \alpha x$.

(III) Các qui tắc cho ở (I) và (II) phải thỏa mãn tám tiên đề sau đây:

(1) $\forall x,\ y \in X : x + y = y + x$ (tính giao hoán);

(2) $\forall x,\ y,\ z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ (tính kết hợp);

(3) $\exists \theta$ (phần tử 0) sao cho $\forall x \in X : \theta + x = x + \theta = x$;

(4) $\forall x \in X : \exists x'$ (phần tử đối) sao cho: $x + x' = x' + x = \theta$;

(5) $\forall x \in X : 1x = x;\ (1 \in \mathbb{R})$;

(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x,\ y \in X : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

(7) $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in X : (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

(8) $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in X : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Ví dụ 1.1.2 Không gian các hàm liên tục từ $[a, b]$ vào $\mathbb{R}$, kí hiệu là $C[a, b]$ là một không gian tuyến tính.

Tương tự, không gian các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$, kí hiệu là $C_1[a, b]$ cũng là không gian tuyến tính.

Thật vậy, với định nghĩa

$$(i)\ z = x + y \Leftrightarrow z(t) = x(t) + y(t)\ \forall t \in [a,b];$$
$$(ii)\ z = \lambda.x \Leftrightarrow z(t) = \lambda x(t)\ \forall t \in [a,b].$$

thì tám tiên đề trên được thỏa mãn. Vậy không gian các hàm liên tục hoặc các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$ là một không gian tuyến tính.

1.1.2 Khái niệm về không gian tuyến tính định chuẩn

Không gian tuyến tính X trên $\mathbb{R}$ được gọi là không gian (tuyến tính) định chuẩn, nếu trên đó có qui tắc cho ứng với mỗi phần tử $x \in X$ bất kỳ một số thực không âm gọi là chuẩn (hoặc độ dài) của x, ký hiệu là $\|x\|$, thỏa mãn các tính chất sau đây:

(i) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$ và $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (tính không âm);

(ii) $\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (tính đồng nhất);

(iii) $\forall x,\ y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Bất đẳng thức tam giác).

Ví dụ 1.1.3 Không gian $C[a,b]$ các hàm liên tục $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và không gian $C_1[a,b]$ là không gian tuyến tính định chuẩn với chuẩn tương ứng là $\|x\|_{C[a,b]} = \max\limits_{a \leq t \leq b} |x(t)|$ và

$$\begin{aligned}\|x\|_{C_1^n[a,b]} &= \max\{\|\ x\ \|_{C[a,b]}, \|\ \dot{x}\ \|_{C[a,b]} \\ &= \max\{\max_{a\leq t\leq b} |x(t)|, \max_{a\leq t\leq b} |\dot{x}(t)|\}.\end{aligned}$$

Khi ấy ba tiên đề về chuẩn được thỏa mãn.

Ví dụ 1.1.4 Giả sử: $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, tức là: $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ ... \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in [a,b]$, ta định nghĩa $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ ... \\ ... \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}$.

Kí hiệu: $C^n[a,b]$ và $C_1^n[a,b]$ là các không gian tuyến tính trên $[a,b]$ với định nghĩa thông thường về phép toán cộng véctơ và nhân một số

với một véctơ.
Ta định nghĩa:

$$\|x\|_{C^n[a,b]} = \max_{1\le i\le n}\{\|x_i\|_{C[a,b]}\}$$

và

$$\|x\|_{C_1^n[a,b]} = \max_{1\le i\le n}\{\|x_i\|_{C_1[a,b]}\}.$$

Khi ấy $C^n[a,b]$ và $C_1^n[a,b]$ là các không gian tuyến tính định chuẩn.

1.2 Phép tính vi phân

1.2.1 Dưới vi phân của hàm lồi

Cho f là một hàm lồi thật (hàm lồi chính thường) trên X. Tập

$$\partial f(x) := \{x^* \in X^* \mid f(z) - f(x) \ge \langle x^*, z - x\rangle \ \forall z \in X\}. \tag{1.1}$$

được gọi là *dưới vi phân* của f tại x.

Ví dụ 1.2.1 *(Dưới vi phân của hàm chỉ)*
Với mọi $x \in A$ thì $\partial\delta(x|A)$ khác rỗng vì nó đều chứa 0. Từ định nghĩa ta suy ra

$$\partial\delta(x \mid A) = N(x \mid A), \tag{1.2}$$

trong đó

$$N(x|A) := \{x^* \in X^* | \langle x^*, z - x\rangle \le 0 \ \forall z \in A\} \tag{1.3}$$

là *nón pháp tuyến* (normal cone) của tập A tại điểm x.

1.2.2 Đạo hàm Gâteaux

Cho X và Y là hai không gian tô pô tuyến tính, V là một lân cận của $x \in X$ và $F : X \to Y$. Nếu

$$\delta F(x,h) := \lim_{t\to 0} t^{-1}(F(x+th) - F(x))$$

tồn tại với mọi $h \in X$ thì ánh xạ $h \to \delta F(x,h)$ được gọi là *biến phân bậc nhất* của F tại x.
Nếu tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục $\Lambda : X \to Y$ sao cho

$$\Lambda h = \delta F(x,h) \ \forall h \in X$$

thì Λ được gọi là *đạo hàm Gâteaux*, ký hiệu là $F'_G(x)$. Khi ấy ta nói: *F khả vi Gâteaux* tại x. Điều này xảy ra khi và chỉ khi tồn tại toán tử tuyến tính liên tục $\Lambda : X \to Y$ sao cho

$$F(x+th) = F(x) + t\Lambda h + o(t) \ \forall h \in X.$$

Ví dụ 1.2.2 Cho r và φ là tọa độ cực của $x \in \mathbb{R}^2$ và $f(x) = r\cos 3\varphi$. Ta có $\delta f(0.h) = f(h)$. Vì $\delta f(0.h)$ không tuyến tính nên f không khả vi Gâteaux tại $0 \in \mathbb{R}^2$.

Trong Giải tích lồi, dưới vi phân đóng vai trò của đạo hàm. Nếu một hàm lồi khả vi Gâteaux tại một điểm thì dưới vi phân tại điểm đó có một phần tử duy nhất là đạo hàm Gâteaux.

1.2.3 Đạo hàm Fréchet

Nếu X và Y là không gian Banach, $F : X \to Y$ *khả vi Fréchet* tại x nếu tồn tại toán tử tuyến tính liên tục $\Lambda : X \to Y$ sao cho

$$F(x+h) = F(x) + \Lambda h + r(h) \quad \text{với} \quad \lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|r(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Khi đó Γ là *đạo hàm Fréchet*, ký hiệu là $F'_F(x)$ hay $F'(x)$. Ánh xạ F được gọi là *chính qui* tại x nếu nó khả vi Fréchet tại x và $\mathrm{Im}F'(x) = Y$.

Kí hiệu $\mathcal{L}(X, Y)$ không gian của các toán tử tuyến tính liên tục từ X và Y, trang bị chuẩn

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|\Lambda x\|_Y.$$

Nếu $F : X \to Y$ khả vi Fréchet tại mọi điểm trong tập mở V và ánh xạ $x \to F'(x)$ liên tục trên V (hay tại $x_0 \in V$) theo tô pô $\mathcal{L}(X, Y)$ thì ta nói *F khả vi liên tục* trên V (hay tại x_0,) hay F thuộc vào lớp C_1.

Nếu F là một phiếm hàm và $F'(x) = 0$ thì x được gọi là một *điểm dừng*.

Ví dụ 1.2.3 *(Đạo hàm Fréchet của ánh xạ afin)*

Một ánh xạ $A : X \to Y$ từ không gian tuyến tính X vào không gian tuyến tính Y có dạng

$$A(x) = \Lambda x + a,$$

với $a \in X$ và Λ là một ánh xạ tuyến tính từ X vào Y, được gọi là *ánh xạ afin*. Nếu X và Y là không gian Banach và Λ liên tục thì A khả vi Fréchet khắp nơi và $A'_F(x) = \Lambda$.

Mệnh đề 1.2.4 *a) Nếu F khả vi Fréchet tại x thì F liên tục và khả vi Gâteaux tại đây $F'_G(x) = F'_F(x)$.*

b) Nếu F khả vi Gâteaux tại x thì F biến phân bậc nhất tồn tại ở đó và $\delta F(x,h) = F'_G(x)h$.

Chứng minh: Xem [4], p. 35. □

Ví dụ 1.2.5 Hàm

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x_1 = (x_2)^2 \text{ và } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{trường hợp còn lại} \end{cases}$$

khả vi Gâteaux tại $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nhưng không liên tục tại đó nên theo Mệnh đề 1.2.4 thì nó không thể khả vi Fréchet được.
Ta có

Định lý 1.2.6 (Định lí giá trị trung bình)

Cho X và Y là các không gian tô pô tuyến tính, U là một tập mở của X, ánh xạ $F : U \to Y$ khả vi Gâteaux tại mọi điểm trên đoạn nối $[x, x+h] \subset U$. Khi đó ta có:

a) Nếu ánh xạ $z \to F'_G(z)$ là một ánh xạ liên tục của $[x, x+h]$ vào Y thì

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 F'_G(x+th)h \, dt.$$

b) Nếu X và Y là không gian Banach thì

$$\|F(x+h) - F(x)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'_G(x+th)\| \cdot \|h\|$$

và với mỗi $\Lambda \in \mathcal{L}(X,Y)$:

$$\|F(x+h) - F(x) - \Lambda h\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|F'_G(x+th) - \Lambda\| \cdot \|h\|.$$